

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Всероссийская научная конференция

Обратные задачи прочности ЛА как теоретическая основа экспериментальной отработки авиационных конструкций

Костин В.А.

Аннотация. Изложены постановка, существующие подходы, методы решения обратных задач и их развитие применительно к прочностным исследованиям тонкостенных конструкций. С позиции единой методологии проводится идентификация физико-механических характеристик материалов и выполненных из них изделий, граничных условий, а также нагрузок, действующих на летательный аппарат. Решения приводятся в детерминированной и стохастической постановках.

Ключевые слова. Тонкостенные конструкции. Обратные задачи. Идентификация. Экстремальная постановка.

Во многих областях науки и техники неуклонно возрастает интерес к обратным задачам. Повышение точности анализа приводит к усложнению математических моделей, обусловленному учетом нестационарности, пространственности, различного рода нелинейных процессов, композитности среды. Это существенно ограничивает применение традиционных методов математического моделирования, приводит к необходимости разработки новых подходов, включая методологию решения обратных задач.

Решение обратных задач требует разработки специальных математических методов, базирующихся на результатах современной теории некорректно поставленных задач, функционального и численного анализа, теорий оптимального управления и стохастических процессов, ориентированных на использование современных компьютерных технологий.

Предлагаемый в докладе материал содержит сведения о практике экспериментальной отработки конструкций ЛА по данным натурного эксперимента, проводимого в лаборатории прочности КНИТУ-КАИ.

Целью исследований помимо самих испытаний конструкций, проводимых на средства и по программе Заказчика, была разработка, постановка и изучение особенностей обратных задач применительно к интерпретации результатов прочностного эксперимента. Были разработаны алгоритмы и программное обеспечение для анализа и оценивания состояния тонкостенных каркасированных конструкций, а также действующих на них нагрузок, с возможностью приложения этих разработок к задачам определения работоспособности ЛА. Велся выбор математических моделей и численных методов (интегрирующие матрицы и МКЭ), в том числе произведена адаптация пакета ANSYS для решения обратных задач в экстремальной постановке. Решены задачи идентификации типовых элементов конструкции ЛА (лопасть вертолета, хвостовая балка вертолета, стабилизатор, кессон крыла).

Ниже в качестве иллюстрации приведены примеры решения типовых задач, а также основные подходы, отработанные в процессе их практической реализации.

Для описания поведения тонкостенных конструкций типа крыла (рис. 1), фюзеляжа и других, имеющих продольный и поперечный силовой набор, для которых существенны явления поперечного сдвига и деформации сечений, используются уравнения Ю.Г.Одиноква:

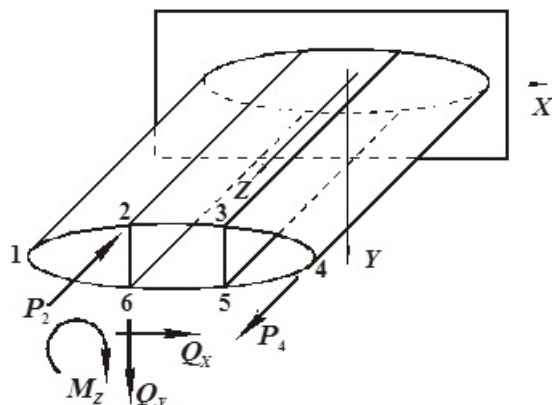


Рис. 1. Цилиндрическая тонкостенная балка

$$(E_i F_i f_i)' = \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k + \sum_{k=1}^n A_{ik} f_k' + d_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Здесь E_i – модуль упругости и F_i – площадь продольного ребра i ; a_{ik} и A_{ik} – коэффициенты, характеризующие работу обшивки на сдвиг; d_i – коэффициент, зависящий от внешнего нагружения; f_i – перемещение продольного ребра i в направлении образующей.

Уравнения (1) позволяют находить решения для достаточно широкого класса реальных авиационных конструкций с односвязными и многосвязными поперечными сечениями произвольной формы, с большими вырезами, с различными вариантами краевых условий и условий стыковки.

Работа отдельных панелей (задачи местной прочности) рассматривается на моделях однослойных, трехслойных и ортотропных пластин. Для трехслойных за исходные соотношения принимается система нелинейных уравнений Э.И.Григолюка и П.П.Чулкова равновесия пологих трехслойных пластин с изотропными несущими слоями. Предполагается, что между функцией перемещений χ и прогибом пластины W существует зависимость типа $\chi = \bar{A} W$ (\bar{A} – константа), позволяющая сводить систему уравнений трехслойных оболочек к решению уравнений для однослойных с приведенной жесткостью D^* . В линейной постановке для решения задач идентификации будем пользоваться следующим уравнением равновесия однослойной пластины:

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 W = q(x, y), \quad (2)$$

где $D^* = D[(1 - \mathcal{G})\bar{A} + \mathcal{G}]$ – приведенная цилиндрическая жесткость, \mathcal{G} – собственная изгибная жесткость несущих слоев. То есть, считаем, что с достаточной точностью идентификацию трехслойных пластин можно вести по существенно более простым уравнениям для однослойных пластин, но с при-

веденной изгибной жесткостью D^* .

Для рассмотрения равновесия ортотропных пластин, находящихся под действием поперечной нагрузки, используем известные уравнения, аналогичные (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right] + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] = q(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где D_x , D_y – жесткости пластины по осям x и y ; D_{xy} – жесткость пластины на сдвиг (кручение); μ_x , μ_y – коэффициенты Пуассона. Предполагается выполнение соотношения между упругими характеристиками конструкции: $E_x \mu_y = E_y \mu_x$.

Также в докладе рассматривается балочная расчетная схема в тех случаях, когда рассчитываются конструкции, для которых характерными являются практически постоянная форма поперечного сечения, а вырезы имеют мощную окантовку (например, крыло планера СА-8Т), где учет поперечного сдвига и депланаций поперечных сечений оказывает несущественное влияние на перераспределение деформаций и напряжений.

Использование разных математических моделей позволяет изучать прочность как конструкции в целом или ее агрегатов (крыло, фюзеляж), так и отдельных ее элементов (стрингера, обшивка, трехслойные, ортотропные панели).

Из численных методов предпочтение отдается методу конечных сумм в форме метода интегрирующих матриц. Метод использован для решения двумерных задач, когда интегрирование возможно проводить на произвольной области (не обязательно прямоугольной) одновременно по двум ортогональным координатам.

Анализируются возможности как одношаговых, так и итерационных процедур в решении обратных задач прочности. Дифференциальные уравнения, описывающие тот или иной процесс, с помощью какого-либо численного метода сводятся в конечном итоге к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (4)$$

где A и B – известные квадратная матрица и матрица-столбец соответственно, X – столбец неизвестных искомых параметров.

Показано, что область применения метода получения решения X путем простого обращения матрицы A весьма ограничена по причине некорректности обратных задач. Как правило матрица A становится плохо обусловленной и погрешности задания ее коэффициентов и правой части B выводят задачу из класса корректных.

На практике это выглядит в получении нерегулярного решения \bar{X} (рис. 4).

Надежным способом получения устойчивого решения обратных задач по терминологии О.М.Алифанова, является приведение задачи к экстремальным постановкам. С этой целью организуется некоторый итерационный процесс, основанный на каком-либо методе оптимизации, при этом варьируются и на каждой итерации уточняются коэффициенты, входящие в матрицу A или правую часть B .

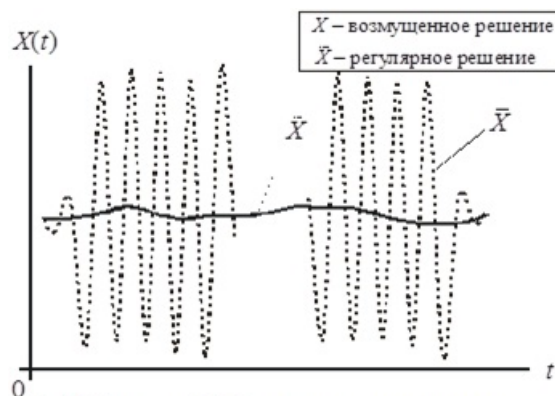


Рис.2. Возможный эффект некорректности задачи, когда величина X зависит от времени t

Рассматриваются задачи идентификации нагрузок и жесткостных характеристик конструкций, при этом интересующие нас параметры определяются в ходе непосредственного решения обратной задачи.



Рис.3. Схема нагружения крыла

Представлено решение задачи определения распределенной (аэродинамической и инерционной) нагрузки q (рис. 3), действующей на конструкцию балочного типа, по известным из эксперимента значениям изгибающего момента M . Показано, что в некоторых случаях, когда кривую моментов (рис. 4) удастся каким-либо образом сгладить, приемлемой точностью обладает метод простого численного дифференцирования. Проводится сравнение с дискретным методом Я.М. Пархомовского (ЦАГИ) (рис. 5).

Построение диаграмм деформирования элементов ($\sigma - \varepsilon$ стрингеров и $\tau - \gamma$ обшивки (рис. 6)) тонкостенной авиационной конструкции проведено на основе модели Ю.Г.Одиноква. Решение получено без применения метода регуляризации. Вводится допущение о разделении во времени процессов нелинейного деформирования продольных ребер

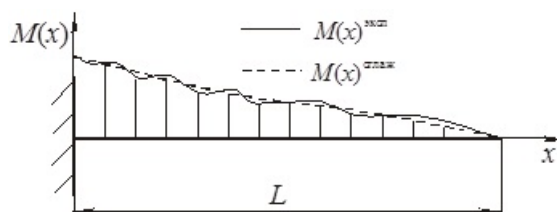


Рис.4. Эпюра изгибающих моментов

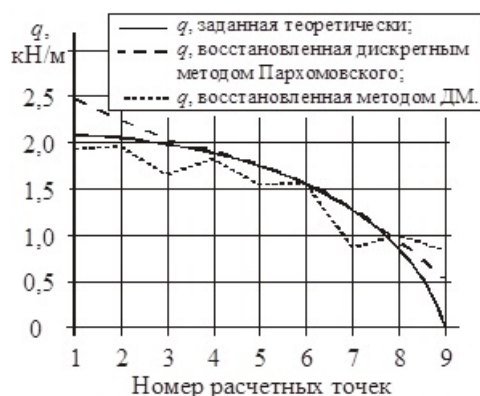


Рис.5. Примеры восстановления нагрузки

и обшивки, что позволяет «расщепить» задачу на две независимые части.

Считается, что при нагружении тонкостенной конструкции до уровня 67 % от расчетно-разрушающей нагрузки процесс деформирования становится нелинейным только для обшивки (рис. 6А). Стрингера

при такой нагрузке продолжают работать в пределах пропорциональности. А при нагрузках, близких к расчетно-разрушающим, нелинейно будут деформироваться и стрингера и обшивка (рис. 6А и 6Б). Приводятся примеры построения диаграмм деформирования $\sigma - \varepsilon$ продольных ребер и $\tau - \gamma$ обшивки для трехстрингерной панели, четырехпоясного кессона и цилиндрического отсека типа фюзеляжа.

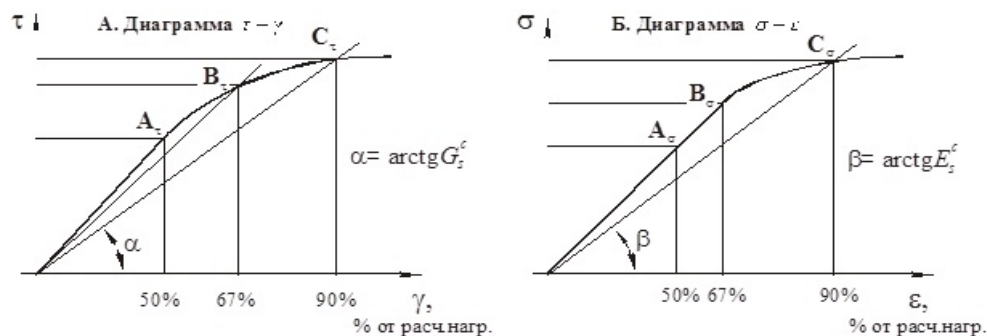


Рис. 6. Диаграммы деформирования общего вида

Рассматривается задача идентификации поля цилиндрических жесткостей изотропных и ортотропных пластин (рис. 7) по известным из эксперимента прогибам W (рис. 4). Показано как влияет изменение картины прогибов исследуемого объекта на решение обратной задачи, т.е. на изменения значений D_x и D_y . С практической точки зрения такое изменение жесткостей говорит о появлении в конструкции некоторого дефекта типа трещины, расслоения и т.п. Показывается достаточно высокая точность и устойчивость численного алгоритма расчета, которая достигается главным образом за счет применения интегрирующих матриц.

Решается задача определения жесткостных характеристик EI в динамике по известным деформациям для конструкций балочного типа переменного сечения. Решение рассматривается для установившегося процесса вынужденных колебаний, переходные процессы, связанные с демпфированием, в работе не рассматриваются. Приводится сравнение с методом Я.М.Пархомовского (ЦАГИ). Эффективность предложенных методов оценивается с помощью эксперимента, проведенного на модели балки в лаборатории.

Обратные задачи прочности, которые нельзя решить путем непосредственного обращения матрицы коэффициентов A и регуляризации по Тихонову, решаются экстремальными итерационными методами, являющимися, по сути, методами естественной регуляризации получаемых решений и описанными принципиально в первой главе.

Экстремальная постановка обратных задач рассматривается также и как задач синтеза автоматического управления. Для получения искомого ре-

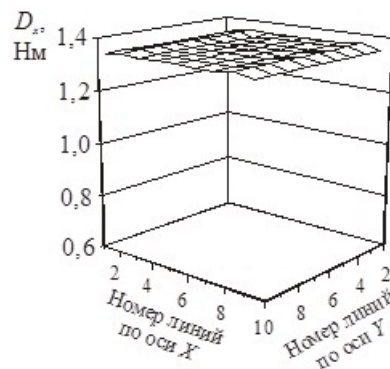


Рис. 7. Поле жесткостей ортотропной пластины

шения определяется структура функционала цели, зависящая, в общем случае, от многих переменных (искомых неизвестных задачи) вида $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где n – количество варьируемых параметров, являющихся варьируемыми управляющими параметрами. Процесс их поиска организовывается следующим образом: путем решения серии прямых задач (4), варьируя n переменных управляющих параметров (x_1, x_2, \dots, x_n) , добиваемся выполнения условия:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min, \quad (5)$$

при ограничениях

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

или

$$g_s \leq \Phi_s \leq G_s, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где g_s и G_s – нижние и верхние граничные значения функционалов Φ_s , а s – номер функционала.

Задача определения управления, гарантирующая выполнение ограничений, является в общем случае задачей синтеза и ее решением может быть множество решений, удовлетворяющих (6).

Изложенная постановка экстремальных задач реализуется с помощью метода выпуклого многогранника для нахождения нагружения при динамическом эксперименте по заданному напряженно-деформированному состоянию конструкции. В качестве примера рассматривается задача о вынужденных колебаниях хвостовой балки вертолета типа Ми-8.

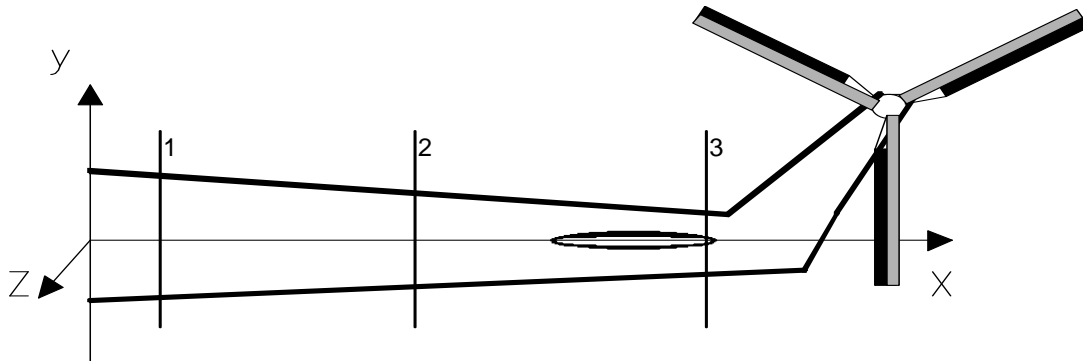


Рис. 8. Схема хвостовой балки вертолета

Уравнения ее колебаний после исключения времени принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - m \omega^2 W + m r_{01} \omega^2 \varphi &= q_y, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 V}{dx^2} \right) - m \omega^2 V + m r_{02} \omega^2 \varphi &= q_z, \\ \frac{d}{dx} \left(GI_p \frac{d\varphi}{dx} \right) - m r_{01} \omega^2 W - m r_{02} \omega^2 V + I_x^m \omega^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использованы общепринятые обозначения: W , V , φ – перемеще-

ния; EI_z , EI_y , GI_p – жесткости. Цифрами 1, 2, 3 обозначены сечения, где программой испытаний заданы величины переменных напряжений. Приводится численная методика определения напряженно-деформированного состояния конструкции на базе уравнений (7) и процедура оптимизации поиска управляющих параметров (нагрузка, координаты и частота ее приложения).

Далее представлено решение задачи восстановления внешних силовых факторов, действующих на конструкцию балочной схемы и модели (1) без ограничений на гладкость экспериментальных кривых (в отличие от главы II).

Функционал цели в данном случае выражает квадрат рассогласования значений изгибающих моментов в сечениях крыла, замеренных в эксперименте и полученных в расчете, т.е.:

$$\Phi_j = \Delta_j = \left(M_j^{\text{эксн}} - M_j^{\text{расч}} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (8)$$

где m – количество варьируемых параметров.

Рассматриваются задачи:

1) Восстановление нагрузки, действующей на ЛА балочной расчетной схемы. В этом случае по известным, например, из эксперимента, деформациям верхней и нижней обшивок крыла определяется распределенная аэродинамическая нагрузка. На примере планера СА-8Т по размаху крыла восстанавливаются нагрузки, действующие в разных полетных случаях.

2) Рассматривается задача определения внешних силовых факторов для конструкций модели (1). По деформациям, известным в отдельных точках конструкции, определяется искомое внешнее нагружение, например, для слабokonического четырехпоясного кессона (рис. 9).

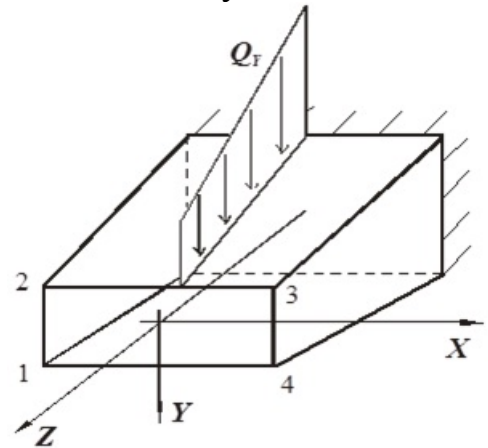


Рис. 9. Слабokonический четырехпоясный кессон

Методом оптимизации нового функционала цели проводится идентификация жесткостных характеристик конструкций в физически нелинейной постановке: определение модулей упругости E (ребер) и сдвига G (обшивки) для элементов тонкостенной авиационной конструкции модели (1).

Предполагается известным внешнее нагружение и замеренные деформации конструкции. Целевой функционал при этом имеет вид:

$$\Phi_i = \alpha \int_0^l \left(f_i^{\text{эксн}} - f_i^{\text{расч}} \right)^2 dz + \beta \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_k \rho_k^2 \right)_i dz, \quad (i = 1, \dots, nm) \quad (9)$$

где $\Gamma_k > 0$ – штрафной параметр;

$$\rho_k = q_k^{расч} - q_{k+1}^{расч} + p_k^{эксн} = 0 \text{ – условие}$$

равновесия k -го ребра; $f_i^{расч}$,

$f_i^{эксн}$ – деформации ребер, определяемые в расчете и в эксперименте, соответственно; α и β – весовые коэффициенты; n – количество продольных ребер; m – количество расчетных сечений по длине конструкции.

Искомыми параметрами при этом являются значения модулей упругости E и сдвига G в интересующих нас местах конструкции. Программа оптимизации находит распределение модулей E и G (рис. 10), удовлетворяющих минимуму функционала (9). Исследуется влияние второго члена функционала на точность идентификации.



Рис.10. Восстановление модулей E и G

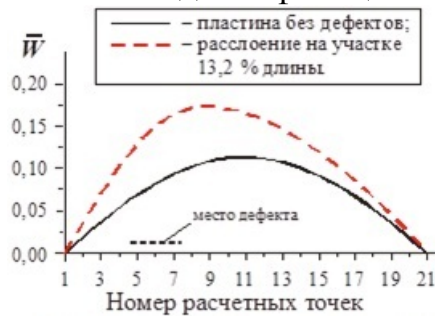


Рис.11. Прогибы трехслойной пластины

дефекта картина деформаций (прогибов (рис. 11) и производных от прогиба) может существенно отличаться от деформаций идеальной конструкции. Приближенно появление дефектов в конструкции можно отразить изменением значений функции жесткости D^* . Путем варьирования в выбранных сечениях значений жесткостей добиваемся минимума следующей свертки условий:

$$\Phi_i = \alpha (W_i^{расч} - W_i^{эксн})^2 + \beta (W_i''^{расч} - W_i''^{эксн})^2 + \gamma \sum_{k=1}^n (W_k'''^{расч})^2, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10)$$



Рис.12. Жесткость трехслойной пластины с дефектом

выражающих по сути некоторый компромисс в совпадении расчетных и экспериментальных значений прогибов и вторых производных, а также требование гладкости вторых производных, которое достигается за счет ограничения суммы третьих производных, что, как показано, является важным условием гарантированной сходимости итерационного процесса идентификации.

Далее в докладе описывается приме-

нение итерационного метода для нахождения жесткостей опор на основе балочной модели. Для этого в уравнение движения балки вводятся податливости заделки и оно принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left([EI] - \omega^2 [J_2]^2 [m] [J_1]^2 \right) \{y''\} - \\ & - \omega^2 A_1 EI_0 [J_2]^2 [m] [J_1] [Z1] \{y''\} - \omega^2 A_2 [J_2]^2 [m] [Z2] \{y''\} = \{M\} \end{aligned} \quad (11)$$

где A_1 , A_2 – податливости заделки на поворот и поперечное перемещение; $[J_1]$ и $[J_2]$ – интегрирующие матрицы первого и второго типа; $[Z1]$ и $[Z2]$ – вспомогательные матрицы. Предполагается, что изгибная жесткость балки уже определена. Показывается как по экспериментально замеренным деформациям y'' можно идентифицировать неизвестные параметры A_1 и A_2 , характеризующие граничные условия. Дан пример решения для вынужденных и собственных колебаний балки.

По результатам приведенных исследований имеются многочисленные публикации в периодических научных изданиях.

**Inverse problems in strength of flight vehicles
as theoretical basis of experimental design of aviation structures**

V.A. Kostin

Abstract. Presented formulation, the existing approaches, methods for solving inverse problems and their development in relation to the strength analysis of thin-walled structures. From the perspective of a single methodology, the identification study of the physical and mechanical properties of materials and made of these products, the boundary conditions, as well as the forces acting on the aircraft is conducted. Solutions are given in determined and stochastic problem statements.

Keywords. Thin-walled structures, Inverse problems, Identification, Extreme posing.

В.А. Костин – доктор технических наук, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, ул. К.Маркса, д.10.

e-mail: costin.smla@kstu-kai.ru; VAKostin@kai.ru